UNIVERSITÉ DE NICE

U.A. du C.N.R.S. n°168 - Jean-Alexandre Dieudonné

PRÉPUBLICATION

Mathématiques

Extension du Théorème de Brown- Douglas-Fillmore au cas des opérateurs non bornés

Jean-Philippe Labrousse - Brigitte Mercier

Prépublication n°243
Juin 1989

Atelier Reprographie - Maths

Adresse : Parc Valrose - F-06034 NICE CEDEX - Tél 93. 52 98 98

EXTENSION DU THEOREME DE BROWN-DOUGLAS-FILLMORE AU CAS DES OPERATEURS NON BORNES

Jean-Philippe Labrousse , Brigitte Mercier

§ 0 . Introduction

En 1973 L. Brown , R.G. Douglas et P.A. Fillmore ont démontré dans [1] un résultat sur la caractérisation de certaines classes d'équivalence d'opérateurs par leur tableau spectral . Ce travail est destiné à étendre ce résultat aux opérateurs non bornés , extension déjà partiellement réalisée dans [7] . Il nous a paru intéressant , en outre , d'établir quelques propriétés des opérateurs essentiellement normaux non bornés , même si elles ne sont pas pertinentes pour la démonstration du résultat principal .

Notations et rappels de résultats

Soit **H** un espace de Hilbert complexe et soit A un opérateur linéaire défini dans **H** et à valeurs dans **H** . On notera D(A) son domaine , N(A) son noyau et R(A) son image . On notera :

$G(A) = \{ u , Au \mid u \in D(A) \} \subset \mathbf{H} \times \mathbf{H}$, le *graphe de A*

et on dira que A est *fermé* si G(A) est fermé . Si A est fermé et D(A) est dense dans **H** alors il existe un opérateur fermé à domaine dense A^* défini dans **H** et à valeurs dans **H** , l'*adjoint de A* . Alors (cf. [8] , §118) l'opérateur $I + A^*A$ défini dans **H** et à valeurs dans **H** est fermé , surjectif et a un domaine dense dans **H** ; si on pose

$R_A = (I + A^*A)^{-1}$, on trouve : $(AR_A)^* = A^*R_{A^*}$

d'ou $\forall u \in \mathbf{H}$, $\| 2AR_Au \|^2 + \| (2R_A - I)u \|^2 = \| u \|^2$ (0 . 1)

De (0 . 1) on déduit immédiatement que :

$$\| AR_A \| \leq 1/2 \quad ; \quad \| R_A \| \leq 1 \tag{0.2}$$

La projection orthogonale sur G(A) dans **H** X **H** est donnée par :

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^*R_{A^*} \\ AR_A & I - R_{A^*} \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

(cf [9] , [2])

On notera C(**H**) l'ensemble des opérateurs fermés à domaine dense **H** et à valeurs dans **H** , muni de la métrique g définie par :

$$\forall A , B \in \mathbf{H} \ , \ g(A,B) = \| P_{G(A)} - P_{G(B)} \| \tag{0.4}$$

Cette métrique induit la topologie uniforme habituelle sur L(**H**) , le sous ensemble des éléments bornés de C(**H**) (cf. **[** 2 **]** et la bibliographie qui y est citée) . Posons encore :

$$S_A = (I + A^*A)^{-\frac{1}{2}}$$

Alors :
$$(AS_A)^* = A^*S_{A^*}$$

et
$$\forall u \in \mathbf{H} \ , \ \| AS_Au \|^2 + \| S_Au \|^2 = \| u \|^2 \tag{0.5}$$

<u>**Remarque 0.1**</u>

L'identité $(AS_A)^* = A^*S_{A^*}$ entraîne que si $u \in D(A^*)$,

$$A^*S_{A^*}u = S_AA^*u$$

et
$$(I + S_A)^{-1}A^*u = A^* (I + S_{A^*})^{-1}u \tag{0.6}$$

Soit $A \in C(\mathbf{H})$. Posons $c(A) = \inf \frac{\| Au \|}{\| u \|}$ où l'inf est pris sur tous les $u \in D(A) \cap N(A)^{\perp}$. c(A) est appellée la <u>*conorme*</u> de A et R(A) est fermé si et seulement si $c(A) > 0$.

Si $A \in C(\mathbf{H})$ avec R(A) fermé et $\max \{ \dim N(A) , \dim N(A^*) \} < \infty$ on dira que A est <u>*Fredholm*</u> (noté $A \in F(\mathbf{H})$) . Si $A \in C(\mathbf{H})$ avec R(A) fermé et $\min \{ \dim N(A) , \dim N(A^*) \} < \infty$, on dira que

A est *semi-Fredholm* (noté $A \in SF(\mathbf{H})$) . Evidemment $F(\mathbf{H}) \subset SF(\mathbf{H})$ et si $A \in SF(H)$, $Ind(A) = \dim N(A) - \dim N(A^*)$ est appelé *l'indice* de A . Si $A \in C(\mathbf{H})$ avec $R(A)$ fermé et si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $N(A^n) \subset R(A)$ on dira que A est *régulier* (cf. [5] , Déf . 4.1.1 et Prop. 4.1.1) . On posera : $Reg(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \text{ est régulier } \}$.
Si $A , B \in C(H)$ on dira que A est *faiblement compact-équivalent* à B (et on notera $A \sim_K B$) si $P_{G(A)} - P_{G(B)}$ est un opérateur compact de $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ dans lui-même . Dans ce cas on peut montrer que l'opérateur $I + A^*B \in F(\mathbf{H})$ et on dira que A est *fortement compact-équivalent* à B (et on notera $A \approx_K B$) si $A \sim_K B$ et si $Ind(I + A^*B) = 0$.
(pour toutes ces définitions voir [6]) . Enfin on écrira :

$$\rho_e(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \in F(\mathbf{H}) \}$$

$\rho_e(A)$ est appelé le *résolvent essentiel* de A .

Proposition 0.2 (voir , par exemple , [3])
Soit $A \in L(\mathbf{H})$ avec $R(A)$ fermé . Alors il existe un unique Bv $\in L(\mathbf{H})$ tel que : $ABA = A$; $BAB = B$

$AB = (B^*A^*)^*$ est la projection orthogonale sur $R(A)$

$BA = (A^*B^*)^*$ et $I - BA$ est la projection orthogonale sur $N(A)$

B est appelé l' *inverse de Moore-Penrose* de A

Remarque 0.3

$R(B)$ est fermé et si B est l'inverse de Moore-Penrose de A alors A est l'inverse de Moore-Penrose de B . Enfin si A est inversible , alors A^{-1} est l'inverse de Moore-Penrose de A .

Nous incluons ici une proposition dont la teneur est bien connue mais dont la démonstration est difficile à trouver dans la littérature . Nous

avons besoin tout d'abord d'un lemme :

Lemme 0.4

Soit $C \in L(\mathbf{H})$, symétrique tel que $0 \leq C \leq 1$. Alors :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\| C(I - C)^n \| < 1/(2n)$ (0.7)

Démonstration

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (I - C + C)^{2k} = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} C^j (I - C)^{2k-j}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (I - C - C)^{2k} = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} (-1)^j C^j (I - C)^{2k-j}$$

Donc $I \geq I - (I - 2C)^{2k} \geq 4k\, C(I - C)^{2k-1}$

ou encore : $\forall u \in \mathbf{H}$, $(C(I - C)^{2k-1}u , u) \leq \| u \|^2/(4k)$

et : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\| C(I - C)^{2k-1}\| < 1/(4k-2)$ (0.8)

En outre : $|(C(I - C)^{2k}u , u)|^2 = |(C(I - C)^{2k-1}(I - C)u , u)|^2$

et en utilisant l'inégalité de Schwarz généralisée (cf. **[** 8 **]** § 104) on trouve $|(C(I - C)^{2k}u , u)|^2 \leq (C(I - C)^{2k-1}u , u) (C(I - C)^{2k+1}u , u)$

$\leq 1/[(4k)(4k+4)] \| u \|^4 < 1/(4k)^2 \| u \|^4$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\| C(I - C)^{2k} \| < 1/(4k)$ (0.9)

et le lemme se déduit de (0 . 8) et de (0 . 9) .

Proposition 0.5

Soit $A \in L(\mathbf{H})$ un opérateur symétrique positif tel que $\| A \| \leq 1$.

Alors il existe une suite de polynomes $\{ p_n(A) \}$ satisfaisant les conditions

suivantes :

1) $p_n(A)$ est de degré 2^{n-1}

2) $p_n(0) = 0$

Si $B \in L(\mathbf{H})$ est l'unique opérateur symétrique positif tel que $B^2 = A$

3) $0 \leq p_n(A) \leq B \leq I$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\| B - p_n(A) \| < 1/n$

Démonstration

Posons : $p_1(A) = A/2$

$$p_{n+1}(A) = p_n(A) + [A - p_n^2(A)]/2 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (0.10)$$

1) et 2) se démontrent aisément par induction sur n . Pour démontrer 3) observons que : $0 \leq p_1(A) = A/2 \leq B \leq I$

et $B - p_1(A) = B(I - B/2) \geq 0$.

Supposons 3) démontré pour n ; alors :

$$B - p_{n+1}(A) = B - p_n(A) - [B^2 - p_n^2(A)]/2$$

Donc : $$B - p_{n+1}(A) = [B - p_n(A)] [I - (B + p_n(A))/2] \qquad (0.11)$$

Comme $B - p_n(A)$ et $I - (B + p_n(A))/2$ sont tous deux positifs (par hypothèse d'induction) et commutent entre eux (ils sont tous deux des polynomes en B) leur produit est également positif .

Donc $p_{n+1}(A) \leq B \leq I$.

Mais alors d'après (0 . 10) et l'hypothèse d'induction , $p_{n+1}(A)$ est la somme de deux opérateurs positifs et par conséquent positif lui même , ce qui démontre 3) .

Finalement $I - (B + p_n(A))/2 = I - B/2 - p_n(A)/2 \leq I - B/2$

Donc de (0 . 11) on déduit que :

$$B - p_{n+1}(A) \leq [B - p_n(A)] (I - B/2)$$

et par induction que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B - p_n(A) \leq [B - p_1(A)] (I - B/2)^{n-1}$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\| B - p_n(A) \| \leq \| B (I - B/2)^n \| \leq 2 \| (B/2) (I - B/2)^n \|$

et 4) se déduit du lemme 0.2 en prenant $C = B/2$.

§ 1 . Bissecteurs

Définition 1.1

Soit $A \in C(H)$. Posons : $\tilde{A} = AS_A(I + S_A)^{-1}$

Pour des raisons que nous exposerons ci-dessous nous appelerons $\tilde{A}$ le *bissecteur* de A . Cette notion a été introduite dans [4] .

Proposition 1.2

Soit $A \in C(H)$. Alors :

(1) $\|\tilde{A}\| \leq 1$

(2) $(\tilde{A})^* = \tilde{A^*}$

(3) $R_{\tilde{A}} = (I + S_A)/2$

(4) $\tilde{A}R_{\tilde{A}} = AS_A/2$

Démonstration

(1) $\|\tilde{A}\| \leq \|AS_A\| \, \|(I + S_A)^{-1}\| \leq 1$

(2) $(\tilde{A})^* = (I + S_A)^{-1}A^*S_{A^*} = A^*S_{A^*}(I + S_{A^*})^{-1} = \tilde{A^*}$, en utilisant (0 . 6)

(3) $I + \tilde{A}^*\tilde{A} = I + (I + S_A)^{-1}A^*S_{A^*}\,AS_A(I + S_A)^{-1} =$

$= I + (I + S_A)^{-1}(I - R_A)\,(I + S_A)^{-1} = 2\,(I + S_A)^{-1}$

Donc : $R_{\tilde{A}} = (I + S_A)/2$

(4) $\tilde{A}R_{\tilde{A}} = AS_A(I + S_A)^{-1}\,(I + S_A)/2 = AS_A/2$

Proposition 1.3

Soit $M_A = \begin{pmatrix} S_A & A^*S_{A^*} \\ AS_A & -S_{A^*} \end{pmatrix}$. Alors M_A est un opérateur unitaire et symétrique de $H \times H$ sur lui-même qui laisse invariant le graphe de $\tilde{A}$ et envoie le graphe de A sur $H \times \{0\}$ et réciproquement .

Démonstration

On vérifie sans difficulté que $M_A^* = M_A$ et que $M_A M_A = I$

En outre, soit $\{u, v\} \in \mathbf{H} \times \mathbf{H}$. Alors, en utilisant (0.3) et la proposition 1.2, on trouve :

$M_A\{u, v\} = \{u, v\} \iff (I + M_A)/2\{u, v\} = \{u, v\} \iff$

$\iff P_{G(\tilde{A})}\{u, v\} = \{u, v\} \iff \{u, v\} \in G(\tilde{A})$

Finalement si $u \in D(A)$ on a :

$M_A\{u, Au\} = \{S_A u + A^* S_{A^*} Au, 0\} \in \mathbf{H} \times \{0\}$

et $M_A\{u, 0\} = \{S_A u, AS_A u\} \in G(A)$

Remarque 1.4

C'est cette propriété de $G(\tilde{A})$ qui nous a amené à appeler $\tilde{A}$ le bissecteur de A : si $\mathbf{H} = \mathbb{R}$, $G(\tilde{A})$ est la droite bissectrice de l'angle compris entre l'axe des abcisses et $G(A)$.

Proposition 1.5 (cf [4])

Soit $A \in L(\mathbf{H})$. Alors $\|\tilde{A}\| < 1$. Plus précisément :

Si A est borné, alors : $\|\tilde{A}\| = \dfrac{\|A\|}{1 + \sqrt{1 + \|A\|^2}}$

Réciproquement si $\|\tilde{A}\| < 1$, alors A est borné

et $\|A\| = \dfrac{2\|\tilde{A}\|}{1 - \|\tilde{A}\|^2}$

Démonstration

Soit A borné ; $\forall u \in \mathbf{H}$ on a :

$\|u\|^2 = \|S_A u\|^2 + \|AS_A u\|^2 \leq (1 + \|A\|^2)\|S_A u\|^2$.

Donc : $\|S_A u\|^2 \geq \dfrac{1}{1 + \|A\|^2}\|u\|^2$ et par conséquent :

$$\| AS_A u \|^2 = \| u \|^2 - \| S_A u \|^2 \leq \frac{\| A \|^2}{1 + \| A \|^2} \| u \|^2$$

D'où $$\| AS_A \| \leq \frac{\| A \|}{\sqrt{1 + \| A \|^2}} \qquad (1.1)$$

On a aussi : $\| S_A^{-1} u \| \leq \sqrt{1 + \| A \|^2} \; \| u \|$

et par conséquent $< u , S_A^{-1} u > \leq \sqrt{1 + \| A \|^2} \; \| u \|^2$

L'inégalité de Schwarz généralisée (cf. [8] § 104) donne alors :

$\forall u , v \in \mathbf{H} \quad [< u , S_A v >]^2 \leq < u , S_A u > < v , S_A v >$

En prenant $v = S_A^{-1} u$ on obtient :

$\| u \|^4 \leq < u , S_A u > < u , S_A^{-1} u >$

d'où $$< u , S_A u > \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \| A \|^2}} \| u \|^2$$

Donc : $\|(1 + S_A) u \|^2 = \| u \|^2 + \| S_A u \|^2 + 2 < u , S_A u > \geq$

$$\geq \left(1 + \frac{1}{1 + \| A \|^2} + \frac{2}{\sqrt{1 + \| A \|^2}} \right) \| u \|^2$$

et finalement $$\|(I + S_A)^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{1 + \| A \|^2}}{1 + \sqrt{1 + \| A \|^2}} \qquad (1.2)$$

en utilisant (1 . 1) et (1 . 2) on trouve :

$$\| \tilde{A} \| \leq \| AS_A \| \; \|(I + S_A)^{-1}\| \leq \frac{\| A \|}{1 + \sqrt{1 + \| A \|^2}} < 1 \qquad (1.3)$$

Réciproquement , si $\| B \| < 1$ on voit que :

$I - B^*B$ est inversible et par conséquent $A = 2B (I - B^*B)^{-1}$ est borné

Il est facile de vérifier que $\tilde{A} = B$ et comme

$< (I - \tilde{A}^*\tilde{A}) u , u > = \| u \|^2 - \| \tilde{A} u \|^2 \geq (1 - \| \tilde{A} \|^2) \; \| u \|^2$

on voit que $$\|(I - \tilde{A}^*\tilde{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \| \tilde{A} \|^2} ,$$ ce qui donne

$$\| A \| \leq \frac{2\| \tilde{A} \|}{1 - \| \tilde{A} \|^2} \quad \text{d'où :} \quad \| A \| \, \| \tilde{A} \|^2 + 2 \| \tilde{A} \| - \| A \| \geq 0$$

On peut exclure le cas où $A = 0$, la proposition étant alors évidente .
On déduit donc de l'inégalité précédente et de (1 . 3) que :

$$\| \tilde{A} \| \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + \| A \|^2}}{\| A \|} = \frac{\| A \|}{1 + \sqrt{1 + \| A \|^2}} \geq \| \tilde{A} \|$$

d'où on déduit immédiatement le reste de la démonstration

Définition 1.6

Nous noterons $C_0(H)$ l'ensenble des contractions T de $L(\mathbf{H})$ (c'est à dire des $T \in L(\mathbf{H})$ avec $\| T \| \leq 1$) telles que $N(I - T^*T) = \{ 0 \}$, muni de la topologie induite par celle de $L(\mathbf{H})$.

Proposition 1.7 (cf [4])

L'application $A \to \tilde{A}$ de $C(\mathbf{H})$ dans $C_0(\mathbf{H})$ est bijective, ouverte, envoie les éléments non bornés de $C(\mathbf{H})$ sur les éléments de norme 1 de $C_0(\mathbf{H})$ et les éléments bornés de $C(\mathbf{H})$ sur les éléments de norme < 1 de $C_0(\mathbf{H})$.

Démonstration

Montrons d'abord la surjectivité de l'application . Soit $B \in C_0(H)$.

Nous avons déjà vu que si $\| B \| < 1$ il existe un $A \in L(\mathbf{H})$ tel que $B = \tilde{A}$

Si $\| B \| = 1$, posons :

$$D(A) = R(I - B^*B) \ ;$$

$$\text{si } u = (I - B^*B)w \in D(A) \ , \quad Au = 2Bw$$

Alors $A \in C(\mathbf{H})$, A est non borné et $\tilde{A} = B$.

En effet , $D(A) = R (I - B^*B)$ est dense dans $\mathbf{H}$.

En outre A est fermé car si $\{ u_n \}$ est une suite d'éléments de $D(A)$ qui converge vers u dans $\mathbf{H}$ et telle que Au_n converge vers v dans $\mathbf{H}$,

alors en posant $w_n = (I - B^*B)^{-1} u_n$ et $t_n = R_B^{-1} w_n$ on a :

$u_n = (I - B^*B) w_n = (2R_B - I) R_B^{-1} w_n = (2R_B - I)t_n \to u$

$$Au_n = 2Bw_n = 2BR_Bt_n \to v$$

et par conséquent , en vertu de (0 . 5) $\{ t_n \}$ est une suite de Cauchy et

il existe $t \in \mathbf{H}$ tel que $t_n \to t$ avec :

$w = R_Bt$, $u = (I - B^*B)w \in D(A)$ et $v = 2Bw = Au$

Un calcul simple montre qu'alors $\tilde{A} = B$.

Enfin A n'est pas borné car $D(A) \neq \mathbf{H}$. En effet , si $D(A) = \mathbf{H}$ alors

$I - B^*B$ serait inversible ce qui entrainerait que $\| B \| < 1$, contradiction

Finalement (cf **[** 2 **]**) :

$g^2(A,A') \leq \|R_A - R_{A'}\|^2 + \|R_{A^*} - R_{A'^*}\|^2 + 2 \|AR_A - A'R_{A'}\|^2$

et comme :

$\|R_A - R_{A'}\| \leq \|S_A - S_{A'}\| \, \|S_A\| + \|S_{A'}\| \, \|S_A - S_{A'}\| \leq 2 \|S_A - S_{A'}\|$

$\|R_{A^*} - R_{A'^*}\| \leq \|S_{A^*} - S_{A'^*}\| \, \|S_{A^*}\| + \|S_{A'^*}\| \, \|S_{A^*} - S_{A'^*}\| \leq 2 \|S_{A^*} - S_{A'^*}\|$

$\|AR_A - A'R_{A'}\|^2 \leq [\|AS_A - A'S_{A'}\| \, \|S_A\| + \| A'S_{A'}\| \, \|S_A - S_{A'}\|]^2 \leq$

$$\leq 2 [\|AS_A - A'S_{A'}\|^2 + \|S_A - S_{A'}\|^2]$$

$g^2(A,A') \leq 4 [2 \|S_A - S_{A'}\|^2 + 2 \|S_{A^*} - S_{A'^*}\|^2 + \|AS_A - A'S_{A'}\|^2]$

En outre $\|S_A - S_{A'}\| \leq 2 g(\tilde{A},\tilde{A}')$; $\|S_{A^*} - S_{A'^*}\| \leq 2 g(\tilde{A},\tilde{A}')$

et $\|AS_A - A'S_{A'}\| \leq 2 g(\tilde{A},\tilde{A}')$

Donc $g^2(A,A') \leq 64 \, g^2(\tilde{A},\tilde{A}')$

d'où $g(A,A') < 8 \, g(\tilde{A},\tilde{A}')$ (1 . 4)

Comme sur $C_0(\mathbf{H})$ la topologie uniforme est équivalente à celle induite

par g (cf **[** 2 **]**) la proposition est démontrée .

§ 2 . Compalence

Définition 2.1

Soit $A , B \in C(H)$. Nous dirons que A et B sont *compalents* s'il existe un opérateur unitaire U tel que $A \approx_K UBU^*$

Remarque 2.2

La définition 2.1 coïncide avec la définition habituelle (cf [1]) si A et B sont bornés .

Proposition 2.3

$A \approx_K UBU^* \iff U^*AU \approx_K B$

La compalence est une relation d'équivalence sur $C(H)$.

Démonstration

Posons $C = UBU^*$. On vérifie facilement que :

$R_C = UR_BU^*$; $R_{C^*} = UR_{B^*}U^*$; $CR_C = UBR_BU^*$; $C^*R_{C^*} = UB^*R_{B^*}U^*$

Donc en posant : $V = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ on voit immédiatement que

$P_{G(C)} = V P_{G(B)} V^*$; $I + A^*C = U(I + U^*A^*UB)U^*$. Donc :

$P_{G(U^*AU)} - P_{G(B)} = V^*(P_{G(A)} - VP_{G(B)}V^*)V = V^*(P_{G(A)} - P_{G(C)})V =$

$=$ compact et $\text{Ind}\,(I + U^*A^*UB) = \text{Ind}\,(I + A^*C) = 0$.

La transitivité de la relation s'établit de la même manière .

Proposition 2.4

Soit $A , B \in C(H)$ tels que A et B soient compalents . Alors :

1) $\rho_e(A) = \rho_e(B)$

2) $\forall\lambda \in \rho_e(A)$, $\text{Ind}\,(A - \lambda I) = \text{Ind}\,(B - \lambda I)$

Démonstration

En utilisant le théorème 3.1 de **[6]** on trouve :

$\rho_e(A) = \rho_e(UBU^*) = \rho_e(B)$

$\forall\lambda \in \rho_e(A)$, $\mathrm{Ind}\,(A - \lambda I) = \mathrm{Ind}\,(UBU^* - \lambda I) = \mathrm{Ind}\,(U(B - \lambda I)U^*) = \mathrm{Ind}\,(B - \lambda I)$

Proposition 2.5

Soit $A , B \in C(H)$. Alors

$\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont compalents $\Rightarrow$ A et B sont compalents .

Démonstration

Sous les hupothèses de la proposition il existe un opérateur unitaire U tel que $\tilde{A} = U\tilde{B}U^* + K$. Posons $\tilde{C} = U\tilde{B}U^*$. Alors :

$\tilde{A} = \tilde{C} + K \quad \Rightarrow \quad P_{G(\tilde{A})} - P_{G(\tilde{C})}$ est compact

$\Rightarrow \; S_A - S_C \; , \; S_{A^*} - S_{C^*} \; , \; AS_A - CS_C$ sont compacts

$\Rightarrow \; R_A - R_C \; , \; R_{A^*} - R_{C^*} \; , \; AR_A - CR_C$ sont compacts

$\Rightarrow \; P_{G(A)} - P_{G(C)}$ est compact $\Rightarrow \; A \sim_K C$

En outre si $V_{AC} = S_AS_C + A^*S_{A^*}CS_C$ on a :

$V_{AC} = (S_A - S_C)S_C + (A^*S_{A^*} - C^*S_{C^*})CS_C + R_C + C^*CR_C =$

$= I$ + compact . Donc $V_{AC} \in F(H)$ et $\mathrm{Ind}\,(V_{AC}) = 0$

Or on voit facilement que $I + A^*C = S_A^{-1}\, V_{AC}\, S_C^{-1}$ et comme S_A^{-1} et S_C^{-1} sont Fredholm d'indices nuls

$\mathrm{Ind}\,(I + A^*C) = \mathrm{Ind}\,(S_A^{-1}) + \mathrm{Ind}\,(V_{AC}) + \mathrm{Ind}\,(S_C^{-1}) = 0$

(cf. [2] , Théorème 2.1) . Donc $A \approx_K C$

Proposition 2.6

Soit $A , B \in L(H)$, tels que $A \sim_K B$ et $R(A)$, $R(B)$ fermés .

Alors $P_{N(A)} - P_{N(B)}$ est compact

Démonstration

Soit $\{u_n\}$ une suite d'éléments de **H** telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| = 1$.

Alors (cf **[6]**, Proposition 2.6) :

$$\|(I - P_{G(A)})\{(I - P_{N(A)})P_{N(B)} u_n , 0 \}\| \geq \frac{c(A)}{\sqrt{1 + c^2(A)}} \|(I - P_{N(A)})P_{N(B)}u_n\|$$

Or $(I - P_{G(A)})\{(I - P_{N(A)})P_{N(B)} u_n , 0 \} = (I - P_{G(A)})\{P_{N(B)} u_n , 0\} =$

$= (I - P_{G(A)})P_{G(B)}\{P_{N(B)} u_n , 0 \}$

Donc :

$$\|(I - P_{N(A)})P_{N(B)} u_n\| \leq \frac{\sqrt{1 + c^2(A)}}{c(A)} \|(I - P_{G(A)})P_{G(B)} \{P_{N(B)}u_n , 0 \}\|$$

et comme $A \sim_K B \Rightarrow (I - P_{G(A)})P_{G(B)} = (P_{G(A)} - P_{G(B)})P_{G(B)}$ est compact , il existe une sous suite de $\{u_n\}$ (notée encore $\{u_n\}$ sans perte de généralité) telle que $\{(I - P_{N(A)})P_{N(B)}u_n\}$ soit convergente .

Donc $(I - P_{N(A)})P_{N(B)}$ est compact et par symétrie entre A et B $(I - P_{N(B)})P_{N(A)}$ est également compact .

Donc $P_{N(A)} - P_{N(B)} = (I - P_{N(B)})P_{N(A)} - [(I - P_{N(A)})P_{N(B)}]^*$ est compact .

§ 3 . Opérateurs essentiellement normaux

Définition 3.1

Soit $A \in C(H)$. Nous dirons que A est *essentiellement normal* si

$$A^*A \approx_K AA^*$$

Remarque 3.2

Si $A \in L(H)$ cette définition est équivalente à la définition habituelle pour les opérateurs bornés : A est essentiellement normal si $A^*A - AA^*$ est un opérateur compact . (cf **[1]**, **[6]** proposition 2.5)

<u>**Proposition 3.3**</u> (cf [7])

Soit $A \in C(\mathbf{H})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) A est essentiellement normal

2) $R_A - R_{A^*}$ est compact

3) $\tilde{A}$ est essentiellement normal

4) Il existe une suite $\{A_n\} \subset L(\mathbf{H})$ telle que

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n est essentiellement normal

b) $g(A, A_n) \to 0$ quand $n \to \infty$

Démonstration

1) $\Longleftrightarrow$ 2) .

D'après la remarque 2.3 de **[6]** :

1) $\Longleftrightarrow AA^*S_{AA^*}S_{A^*A} - S_{AA^*}A^*AS_{A^*A}$ est compact . (3 . 1)

Or $\forall u \in D((A^*A)^2)$ $[I + (A^*A)^2]u = (I + A^*A)^2u - 2(I + A^*A)u + 2u$

En posant $u = R_{A^*A}v$, on trouve :

$v = (I + A^*A)^2R_{A^*A}v - 2(I + A^*A)R_{A^*A}v + 2R_{A^*A}v$

d'où $R_A^2 v = [I - 2R_A(I - R_A)] R_{A^*A}v$

Or $R_A(I - R_A) = A^*R_{A^*}AR_A$ et par conséquent

$\| R_A(I - R_A)\| = \| AR_A\|^2 \leq 1/4$, en utilisant (0 . 2)

Donc $I - 2R_A(I - R_A) \geq I/2$ est inversible et on peut écrire :

$R_{A^*A} = R_A^2 [I - R_A(I - 2R_A)]^{-1}$

d'où $S_{A^*A} = R_A [I - 2R_A(I - R_A)]^{-1/2}$

et de même $S_{AA^*} = R_{A^*}[I - 2R_{A^*}(I - R_{A^*})]^{-1/2}$

En remplaçant ces valeurs dans (3 . 1) on trouve :

$[I - 2R_{A^*}(I - R_{A^*})]^{-1/2} (R_A - R_{A^*}) [I - 2R_A(I - R_A)]^{-1/2}$ est compact

et par conséquent $R_A - R_{A^*}$ est compact

2) $\Rightarrow$ 3) .

En utilisant la proposition 0.5 on voit que

2) $\Rightarrow$ $S_A - S_{A^*} = \lim_{n \to \infty} [\, p_n(R_A) - p_n(R_{A^*}) \,]$ est compact , ce qui

est équivalent à dire que $R_{\tilde{A}} - R_{\tilde{A}^*}$ est compact . Comme

$R_{\tilde{A}} - R_{\tilde{A}^*} = R_{\tilde{A}} (\tilde{A}\tilde{A}^* - \tilde{A}^*\tilde{A}) R_{\tilde{A}^*}$ et $\tilde{A}$ est borné et par conséquent

$R_{\tilde{A}}$ et $R_{\tilde{A}^*}$ sont inversibles on en déduit que $\tilde{A}\tilde{A}^* - \tilde{A}^*\tilde{A}$ est compact .

3) $\Rightarrow$ 4)

Si A est borné 4) est banalement vrai . Supposons donc A non borné .

Posons : $\tilde{A}_n = (1 - 1/n)\, \tilde{A}$. Alors $\tilde{A}_n$ est essentiellement normal et

comme $\| \tilde{A}_n \| \leq 1 - 1/n < 1$,

$A_n = 2(1 - 1/n)\, \tilde{A}\, [I - (1 - 1/n)^2 \tilde{A}^*\tilde{A}]^{-1} \in L(H)$

et A_n est essentiellement normal car $A_n^*A_n - A_nA_n^*$ est compact

(simple vérification) . En outre : $\tilde{A}_n \to \tilde{A}$ dans $L(H)$ quand $n \to \infty$

Donc d'après (1 . 3) : $g(A_n, A) \to 0$ quand $n \to \infty$

4) $\Rightarrow$ 2)

Soit $\{A_n\} \subset L(H)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n soit essentiellement

normal et $g(A, A_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors

$\| R_{A_n} - R_A \| \to 0$ quand $n \to \infty$

et $\| R_{A^*_n} - R_{A^*} \| \to 0$ quand $n \to \infty$

Donc $R_{A^*} - R_A$ est limite uniforme des opérateurs compacts

$R_{A^*_n} - R_{A_n}$ et par conséquent est compact

<u>Corollaire 3.4</u>

Soit $A \in C(H)$, A essentiellement normal . Alors :

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $A - \lambda I$ est essentiellement normal

Démonstration

En vertu de 4) il existe $\{A_n\} \subset L(H)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n soit

essentiellement normal et $g(A, A_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\{A_n - \lambda I\}$ est une suite d'opérateurs bornés , essentiellement

normaux avec $g(A - \lambda I, A_n - \lambda I) \to 0$ quand $n \to \infty$ (cf [6]

proposition 2.6). Donc $A - \lambda I$ est essentiellement normal

Proposition 3.5

Soit $A \in C(H)$, A essentiellement normal et $R(A)$ fermé . Alors :

A est quasi-Fredholm

Démonstration

$R(A)$ fermé $\Rightarrow$ $R(A^*)$ fermé $\Rightarrow$ $R(A^*A)$ et $R(AA^*)$ sont fermés

D'après la proposition 2.6 on en déduit que

$P_{N(A^*)} - P_{N(A)} = P_{N(AA^*)} - P_{N(A^*A)}$ est compact

Donc $I - P_{N(A^*)} + P_{N(A)} \in F(H)$ et par conséquent $R[I - P_{N(A^*)} + P_{N(A)}] =$

$= R[P_{R(A)} + P_{N(A)}]$ est fermé et de codimension finie . Comme

$R(A) + N(A) \supset R[P_{R(A)} + P_{N(A)}]$ on en déduit que $R(A) + N(A)$ est fermé

et de codimension finie . Symétriquement $R(A^*) + N(A^*)$ est fermé et de

codimension finie , d'où $R(A) \cap N(A)$ est de dimension finie . La suite

$\{ R(A^j) \cap N(A) \}$, $j = 1 , 2 , \ldots$ est une suite décroissante de sous espaces

de dimensions finies : il existe donc un $d \in \mathbb{N}$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq d \Rightarrow R(A^n) \cap N(A) \supset R(A^d) \cap N(A)$.

$R(A^d) \cap N(A)$ est fermé (car de dimension finie)

$R(A) + N(A^d)$ est fermé (car de codimension finie)

Donc A est quasi Fredholm . (cf. [5] , Définition. 3.1.2)

Corollaire 3.6

Soit $A \in C(H)$ essentiellement normal . Alors

1) $Reg(A) \subset \rho_e(A)$

2) Si A est semi Fredholm , il est Fredholm

Démonstration

1) Si $\lambda \in Reg(A)$, $R(A - \lambda I)$ est fermé et comme $A - \lambda I$ est régulier

$$\dim N(A - \lambda I) = \dim [N(A - \lambda I) \cap \overline{R(A - \lambda I)}] < \infty$$
$$\dim N(A^* - \bar{\lambda} I) = \dim [N(A^* - \bar{\lambda} I) \cap \overline{R(A^* - \bar{\lambda} I)}] < \infty$$

et par conséquent $\lambda \in \rho_e(A)$

2) Si $A \in SF(\mathbf{H})$, il existe un voisinage U de 0 tel que $\forall \lambda \in U$,

$Ind (A - \lambda I) = Ind (A)$.

Or si $\lambda \in U \backslash \{0\}$, $\dim N(A - \lambda I) \leq \dim [N(A) \cap R(A)] < \infty$
et $\dim N(A^* - \bar{\lambda} I) \leq \dim [N(A^*) \cap R(A)] < \infty$

Donc $Ind (A) = Ind (A - \lambda I) < \infty$ et par conséquent $A \in F(\mathbf{H})$

__Proposition 3.7__

Soit $A \in C(\mathbf{H})$ essentiellement normal . Alors $g(A^*A , AA^*) < 1$

Démonstration

Par hypothèse $P_{G(A^*A)} - P_{G(AA^*)}$ est compact et autoadjoint et

$g(A^*A,AA^*) \leq 1$. Pour que $g(A^*A,AA^*) = 1$ il faudrait que

$P_{G(A^*A)} - P_{G(AA^*)}$ admette ± 1 comme valeur propre .

Supposons par exemple que $\{u , v\} \in \mathbf{H} \times \mathbf{H}$, $||\{u , v\}|| = 1$ soit tel que

$P_{G(A^*A)} \{u , v\} - P_{G(AA^*)} \{u , v\} = \{u , v\}$. Alors :

$$||[I + P_{G(AA^*)}]\{u , v\}||^2 = ||\{u , v\}||^2 + (3 P_{G(AA^*)}\{u , v\},\{u , v\}) \leq$$

$$\leq ||P_{G(A^*A)} \{u , v\}||^2 \leq ||\{u , v\}||^2$$

Donc $P_{G(AA^*)}\{u , v\} = \{ 0,0 \}$ et $P_{G(A^*A)}\{u , v\} = \{u , v\}$

où encore $R_{AA^*}u + AA^*R_{AA^*}v = 0$; $AA^*R_{AA^*}u + v - R_{AA^*}v = 0$

$R_{A^*A}u + A^*AR_{A^*A}v = u$; $A^*AR_{A^*A}u + v - R_{A^*A}v = v$

d'où : $v \in D(AA^*)$, $u = - AA^*v$, $u \in D(A^*A)$ et $v = A^*Au$

Donc $u = - AA^*A^*Au$

et par conséquent $\| Au \|^2 = - (Au , AAA^*A^*Au) = - \| A^*A^*Au \|^2$

Donc $\| Au \| = 0$, d'où $Au = 0$ et $u = 0$ et $v = 0$, contradiction .

Si $P_{G(A^*A)} \{u , v\} - P_{G(AA^*)} \{u , v\} = - \{u , v\}$ on procède de la même façon , en utilisant la symétrie entre A et A^* .

§ 4 . Théorème de Brown-Douglas-Fillmore

Proposition 4.1

Soit A une contraction essentiellement normale et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$ et $R(A - \lambda I)$ soit fermé . Alors si $F(\lambda) = (A - \lambda I) + \lambda (A^* - \bar{\lambda} I) A$ il existe un opérateur borné inversible C et un opérateur compact K tels que $F(\lambda) = (A - \lambda I) C + K$

Démonstration

Soit $B(\lambda)$ l'inverse de Moore-Penrose de $A - \lambda I$.

Comme $R(A - \lambda I)$ est fermé , $B(\lambda)$ est borné et à image fermée . En outre

$B^*(\lambda)(A^* - \bar{\lambda} I) = (A - \lambda I)B(\lambda) = P_{R(A - \lambda I)}$. Or :

$$A^* - \bar{\lambda} I = (A^* - \bar{\lambda} I)B^*(\lambda)(A^* - \bar{\lambda} I) = (A^* - \bar{\lambda} I)B^*(\lambda)(A^* - \bar{\lambda} I)(A - \lambda I)B(\lambda) =$$

$$= (A^* - \bar{\lambda} I)B^*(\lambda)(A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda} I)B(\lambda) + \text{compact} =$$

$$= [(A^* - \bar{\lambda} I)B^*(\lambda) - (A - \lambda I)B(\lambda)](A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda} I)B(\lambda) + (A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda} I)B(\lambda) +$$
$$+ \text{compact} .$$

Or $[(A^* - \bar{\lambda} I)B^*(\lambda) - (A - \lambda I)B(\lambda)] = P_{R(A^* - \bar{\lambda} I)} - P_{R(A - \lambda I)} =$

$= P_{N(A^* - \lambda I)} - P_{N(A^* - \bar{\lambda} I)} =$ compact , d'après la proposition 2.6

Donc $F(\lambda) = (A - \lambda I) + \lambda(A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda} I)B(\lambda)A + \text{compact}$

Ou encore $F(\lambda) = (A - \lambda I)[I + \lambda(A^* - \bar{\lambda}I)B(\lambda)A] + \text{compact}$ (4 . 1)

Posons $U(\lambda) = (A^* - \bar{\lambda}I)B(\lambda)$.

Alors $U^*(\lambda)U(\lambda) = B^*(\lambda)(A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda}I)B(\lambda) =$

$= B^*(\lambda)(A^* - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I)B(\lambda) + \text{compact} = P_{R(A-\lambda I)} + \text{compact}$

Donc $\sqrt{U^*(\lambda)U(\lambda)} = \lim_{n\to\infty} p_n(P_{R(A-\lambda I)} + \text{compact}) =$

$= \lim_{n\to\infty} [p_n(P_{R(A-\lambda I)}) + \text{compact}] = P_{R(A-\lambda I)} + \text{compact}$

En utilisant la décomposition polaire de $U(\lambda)$ on obtient :

$U(\lambda) = T\sqrt{U^*(\lambda)U(\lambda)}$ où T est une isométrie partielle

Donc $U(\lambda) = T\,P_{R(A-\lambda I)} + K(\lambda)$ où $K(\lambda)$ est compact

et par conséquent $\| U(\lambda) - K(\lambda) \| \leq 1$.

Finalement $F(\lambda) = (A - \lambda I)\{ I + \lambda\, U(\lambda)\, A \} + \text{compact} =$

$= F(\lambda) = (A - \lambda I)\{ I + \lambda\,[U(\lambda) - K(\lambda)]\, A \} + \text{compact}$

et comme $|\lambda| < 1$, $\| \lambda\,[U(\lambda) - K(\lambda)]\, A \| < 1$ et par conséquent en prenant $C = I + \lambda\,[U(\lambda) - K(\lambda)]\, A$ la proposition est démontrée .

Proposition 4.2

Soit A une contraction essentiellement normale et si $\lambda \in \mathbb{C}$ posons encore $F(\lambda) = (A - \lambda I) + \lambda(A^* - \bar{\lambda}I)A$. Alors si $F(\lambda)$ est un opérateur de Fredholm $A - \lambda I$ est aussi un opérateur de Fredholm et

$$\operatorname{Ind}(F(\lambda)) = \operatorname{Ind}(A - \lambda I)$$

Démonstration

Puisque $F(\lambda)$ est Fredholm , $\dim N(F(\lambda)) < \infty$ et $c(F(\lambda)) > 0$.

Posons $K_o = A^*A - AA^*$. K_o est compact et symétrique et par conséquent **H** se décompose en une somme directe orthogonale au plus dénombrable de sous espaces M_j , invariants par rapport à K_o , avec

$\dim M_j < \infty$ et tels que $K_{o|M_j} = \lambda_j I_j$ (I_j désignant la restriction de l'identité à M_j) avec $\lambda_o = 0$, la suite de nombres réels $\{ |\lambda_j| \}$ étant décroissante à partir de $j = 1$, avec $\lim_{n \to \infty} |\lambda_j| = 0$

Alors $\exists\, M = \sum_{j=1}^{n} M_j$ (donc $\dim M < \infty$) tel que :

$\| K_{o|M^\perp} \| \leq \min\{ c^2(F(\lambda))/5 , c(F(\lambda))/5 \}$. Posons $N = M + N(F(\lambda))$.

Alors $\dim N < \infty$.

Supposons que $R(A - \lambda I)$ ne soit pas fermé :

alors $R(A - \lambda I)_{|N^\perp}$ n'est pas fermé et par conséquent il existe $u \in N^\perp$,
$\| u \| = 1$ avec $\| (A - \lambda I)u \| \leq c(F(\lambda))/5$.
Or $F(\lambda)u = (A - \lambda I)u + \lambda(A^*A - AA^*)u + \lambda A(A^* - \bar{\lambda} I)u$
et $\| (A^* - \bar{\lambda} I)u \|^2 = (K_o u , u) + \| (A - \lambda I) u \|^2$. Donc :

$$\| (A^* - \bar{\lambda} I) u \|^2 \leq c^2(F(\lambda)) \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{25} \right) \leq \left(\frac{3}{5} c(F(\lambda)) \right)^2$$

et par conséquent :

$\| F(\lambda)u \| \leq c(F(\lambda))/5 + | \lambda | c(F(\lambda))/5 + | \lambda | \, \| A \| \, 3c(F(\lambda))/5 < c(F(\lambda))$,

contradiction .

Donc $R(A - \lambda I)$ est fermé .

Mais alors, en vertu de la proposition 4.1 , $\exists$ C inversible et K compact tels que $F(\lambda) = (A - \lambda I) C + K$.

Donc $(A - \lambda I)$ est Fredholm et $\mathrm{Ind}\,(A - \lambda I) = \mathrm{Ind}\,(F(\lambda))$

Théorème 4.3

Soit $A \in C(\mathbf{H})$ essentiellement normal . Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $| \lambda | < 1$,

posons : $$\Phi(\lambda) = \frac{2\lambda}{1 - |\lambda|^2}$$

Alors $\Phi(\lambda) \in \rho_e(A) \iff \lambda \in \rho_e(\tilde{A})$

et $\mathrm{Ind}\,(A - \Phi(\lambda) I) = \mathrm{Ind}\,(\tilde{A} - \lambda I)$

Démonstration

$A - \Phi(\lambda) = 2A(I - \tilde{A}^*\tilde{A})^{-1} - 2\lambda(1 - |\lambda|^2)^{-1} = 2(1 - |\lambda|^2)^{-1} F(\lambda) (I - \tilde{A}^*\tilde{A})^{-1}$

Comme $(I - \tilde{A}^*\tilde{A})^{-1}$ est surjectif , il est Fredholm et par conséquent $A - \Phi(\lambda)$ est Fredholm si et seulement si $F(\lambda)$ l'est aussi et ils ont le même indice . Le reste de la démonstration se déduit immédiatement des deux propositions précédentes

Théorème 4.4

Soit $A , B \in C(\mathbf{H})$, essentiellement normaux . Alors A et B sont compalents si et seulement si ils ont le même tableau spectral , c'est à dire si

$$\rho_e(A) = \rho_e(B)$$

et si $\forall \lambda \in \rho_e(A)$, $\quad \mathrm{Ind}\,(A - \lambda I) = \mathrm{Ind}\,(B - \lambda I)$

Démonstration

" seulement si " :

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.4

" si " :

Le théorème précédent montre qu'alors on a :

$$\rho_e(\widetilde{A}) = \rho_e(\widetilde{B})$$

et $\forall \lambda \in \rho_e(\tilde{A})$, $\quad \mathrm{Ind}\,(\widetilde{A} - \lambda I) = \mathrm{Ind}\,(\widetilde{B} - \lambda I)$

Donc , d'après le théorème de Brown-Douglas-Fillmore $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont compalents et par conséquent en utilisant la proposition 2.5 , A et B sont compalents .

ENGLISH SUMMARY

In 1976 , L. Brown , R.G. Douglas and P.A. Fillmore have given a caracterization of compalence classes of essentially normal bounded operators on a Hilbert space by means of their spectral pictures . The present works is devoted to the extension of that now classical result to the case of unbounded operators also on a Hilbert space .

Bibliographie

[1] L. BROWN , R.G. DOUGLAS , P.A. FILLMORE *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras* Rochester Conf. on Op. Theory , Lectures Notes in Math , **345** , Springer Verlag , New York (1973) 58-127

[2] H.O. CORDES , J.Ph. LABROUSSE *The invariance of the index in the metric space of closed operators* J. Math and Mech. **12** (5) (1963) 693-720

[3] C.W. GROETSCH *Generalized inverses of linear operators* :ercel Dekker, Nez York (1977)

[4] J.Ph. LABROUSSE *Quelques topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert et leurs applications* Univ. de Nice , Dpt. de Math. , Nice (1970)

[5] J.Ph. LABROUSSE *Les opérateurs quasi Fredholm : une généralisation des opérateurs semi Fredholm* Rend. Circ. Mat. Palermo ,T. XXIX , (1980) 161-258

[6] J.Ph. LABROUSSE , B. MERCIER *Equivalences compactes entre deux opérateurs sur un espace de Hilbert* Math. Nachr. **133** (1987) 91-105

[7] B. MERCIER *Généralisation d'un théorème de Brown-Douglas-Fillmore aux opérateurs fermés à domaine dense* Univ. de Nice , Dpt. de Math. , Nice (1984)

[8] F. RIESZ , B. Sz. NAGY *Leçons d'analyse fonctionnelle* Akad. Kiado , Budapest , (1952)

[9] M.H. STONE *On unbounded operators on a Hilbert space* J. Indian Math. Soc. **15** (1951) 155-192

Département de Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
F-06034 Nice Cedex
FRANCE